令和 6 年度　試 験 問 題

中 期 日 程

数　　　学（120 分）

注　　　意

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は 7 ページあります。

3　解答用紙は大問ごとに 1 枚あり，合計 4 枚あります。解答用紙には受験番号欄（1 枚につき 2 ケ所）と氏名欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入しなさい。

4　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

なお，問題冊子の 2 ページ， 4 ページ， 6 ページは下書き用紙です。

5　解答は，全て解答用紙の指定されたところに書きなさい。書き切れない場合は，当該解答用紙の裏面を使用してよいが，表面に「裏面使用」と明記しなさい。

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。 (配点 75 点)

〔1〕 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$$111x + 13y = 1$$

〔2〕 中心が点$(a,\ b,\ 1)$，半径 5 の球面が yz 平面と交わってできる円の半径が 3 で，zx 平面と交わってできる円の半径が $\sqrt{21}$ であるという。a，b の値を求めよ。

〔3〕 i を虚数単位とし，$z = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$，$w = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$ とするとき，$|z - w|^2$ の値を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

2　平面上の3つの異なる単位ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とし，$\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ とする。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + 1$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。　　　　（配点75点）

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を α $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ とするとき，θ を α で表せ。

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(3)　θ の値を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

3 座標平面上において2つの曲線を $C_1 : y = e^{-\frac{x}{k}}$，$C_2 : y = e^{-x+1}$ とする。ただし，k は定数で，$k > 1$ とする。次の問いに答えよ。（配点 75 点）

(1) C_1 と C_2 の共有点の座標を k で表せ。

(2) C_1 と C_2 および y 軸で囲まれた図形の面積を $S(k)$ とする。$S(k)$ を k で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} S(k)$ を求めよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t} = 1$ を用いてよい。

（下 書 き 用 紙）

4 座標平面上において曲線 $y = x\sqrt{1-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を C とする。次の問いに答えよ。（配点 75 点）

(1) 関数 $y = x\sqrt{1-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最大値を求めよ。

(2) C と x 軸で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_1 を求めよ。

(3) C と x 軸で囲まれた部分を，y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ。また，V_2 と (2) の V_1 との大小関係を示せ。